BOUSHOBZA OMAR

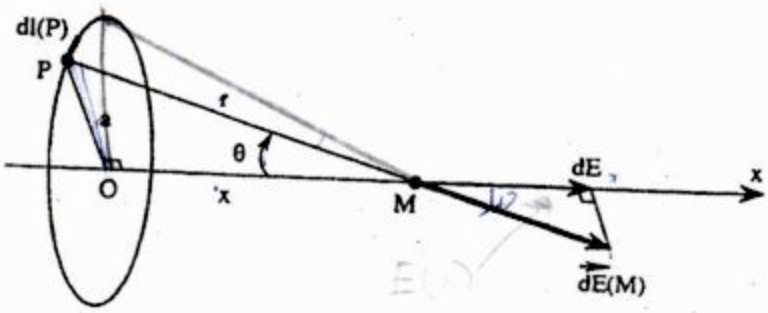
Université Abdelmalek Essâadi
Faculté des Sciences
Département de Physique
Tétouan

Année : 2007 / 2008
SMA-SMI

TD d'Eléctricité
Série n° 3

Exercice 1 :

Des charges électriques sont réparties uniformément sur une bouche circulaire de centre O et de rayon a. La densité linéique de charges est $\lambda_0 > 0$.

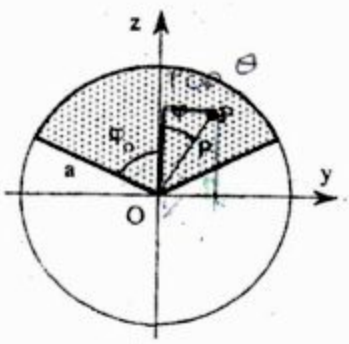


1°/ Déterminer l'expression du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au point M de l'axe de la boucle tel que $\overline{OM} = x$.

2°/ Représenter le graphe de E(x).

Exercice 2 :

Un secteur de disque circulaire de centre O et de rayon a porte sur une de ses faces des charges réparties uniformément avec la densité $\sigma_0 > 0$. On lui associe le repère (Oxyz) tel que l'axe Ox est perpendiculaire au plan du disque et l'axe Oz est dirigé suivant la bissectrice de l'angle au sommet du secteur qui vaut $2\varphi_0$.



On note ρ *et* φ les coordonnées polaires d'un point P du secteur :

$\rho = OP$ *et* $\varphi = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$.

Un point M de l'axe Ox est repéré par on abscisse $\overline{OM} = x\,(x \neq 0)$.

1°/ Déterminer le vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au point M.

2°/ Déduire du résultat précédent l'expression du champ électrostatique crée au point M par un disque uniformément chargé.

On rappelle que : $\int \frac{du}{(u^2+1)^{1/2}} = \ell n\left|u + \sqrt{u^2+1}\right|$ *et* $\int \frac{du}{(u^2+1)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$

ETUSUP .com

Exercice 3 :

Un cylindre de hauteur h et de rayon a contient des charges réparties dans son volume de manière non uniforme. La densité volumique ρ(M) dépend de la distance r du point courant M de la distribution à l'axe du cylindre, selon la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 + \frac{\rho_1}{a} r \quad (\rho_0 \quad et\ \rho_1 \text{ sont des constantes})$$

1/ Calculer en fonction de ρ_0, ρ_1, a et h, la charge totale Q de la distribution.
2/ Déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace.

Exercice 4 :

L'espace entre deux sphères concentriques de centre O et de rayon R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) est chargé avec une densité volumique ρ. On repère la position d'un point M de l'espace par sa distance r au centre des deux sphères.

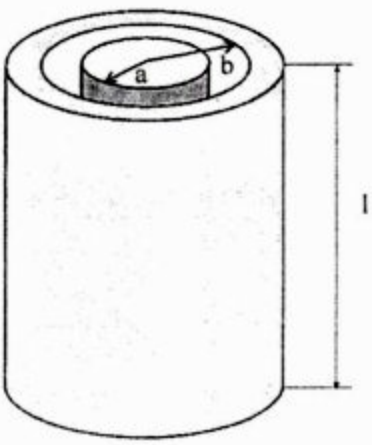
1° Déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace pour une densité volumique $\rho = \frac{a}{r^2}$ (a est une constante).

2° Déduire le potentiel en tout point M de l'espace.

Exercice 5 :

1°) Calculer la capacité d'un condensateur composé de deux cylindres concentriques de rayon " **a** " et de rayon " **b** ", **a<b** . Ils sont tous les deux de longueur " l ". Le cylindre de rayon " **a** " porte la charges Q.

2°) Calculer la capacité de 1 m mètre de câble coaxial caractérisé par un rayon du conducteur extérieur **b**=7,27 mm et un rayon du conducteur intérieur **a**=2,58 mm.



****

ETUSUP .com

3/3/2008

SÉRIE n° 3

EXERCICE 1

① $\vec{dE} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2}$ $\quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

$d\vec{E}_x = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \vec{e}_x$

Par raison de la symétrie les composants suivant (Oy) s'annulent :

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{r} = \frac{d\vec{E}_x(M)}{d\vec{E}(M)}$

$dE_x = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{\lambda dl\, x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$ avec $r^2 = a^2 + x^2$

$E_T = \int_{cercle} dE_x = \int_0^{2\pi a} \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} \cdot dl = \frac{\lambda x}{2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi a = \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x}$

②

$E(x) = \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$

$E(-x) = \frac{a\lambda(-x)}{2\varepsilon_0 (a^2+(-x)^2)^{3/2}} = -E(x)$

Donc le graphe de $E(x)$ est symétrique par rapport à O.

$E(0) = 0$

- $\lim_{\infty} E_x = \lim_{\infty} \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$

On travaille dans $[0, \infty[$

$\lim_{x\to+\infty} E_x = \lim \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 (x^2(1+\frac{a^2}{x^2}))^{3/2}} = \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 x^{2\cdot 3/2}} = \frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0 x^3} = \frac{a\lambda}{2\varepsilon_0 x^2}$

$\frac{a^2}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} E_x = 0^+$

$dE_t = a\lambda \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} + x \left(\frac{\lambda\varepsilon_0 (2x(a^2+x^2)^{1/2}}{\cdots (x^2+a^2)^3} \right. \right.$

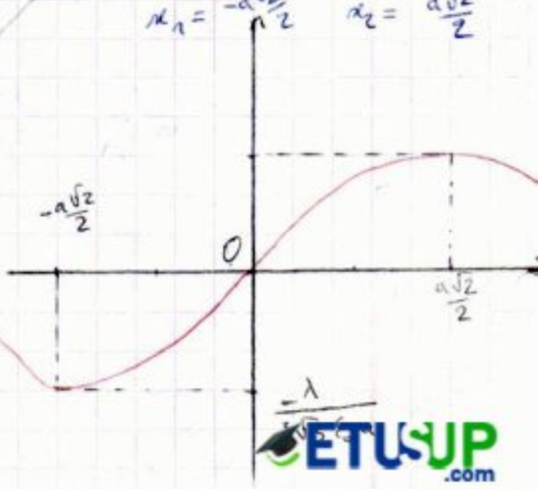
$dE_t = \frac{a\lambda}{2\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{a\lambda\, 3x^2}{}$

$\Delta = 8a^2$

$E(\frac{a\sqrt{2}}{2}) = \frac{\lambda}{3\sqrt{3}\varepsilon_0 a}$

$x_1 = \frac{\sqrt{8a^2}}{-4}$ $\quad x_2 = \frac{\sqrt{8a^2}}{4}$

$x_1 = \frac{-a\sqrt{2}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
dE_t		+	0	−	
E_t		↗	$\frac{\lambda}{3\sqrt{3}\varepsilon_0 a}$	↘	

ETUSUP .com

EXERCICE 3

1) $\rho(r) = \rho_0 + \frac{\rho_1}{a} r$

$$Q = \iiint_V \rho \, d\tau$$

En coordonnées cylindriques

$$d\tau = r\,dr\,.\,d\theta\,.\,dz$$

$$Q = \iiint \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^a \left(\rho_0 r + \frac{\rho_1}{a} r^2\right) dr \,.\int_0^{2\pi} d\theta \,.\int_0^h dz$$

$$= 2\pi h \left[\frac{\rho_0}{2} r^2 + \frac{\rho_1}{3a} r^3\right]_0^a$$

$$\boxed{Q = 2\pi h \left(\frac{\rho_0 a^2}{2} + \frac{\rho_1}{3} a^2\right)}$$

2) . 1er cas : M à l'extérieur : $h \gg \cancel{R}\ r$

On obtient alors une symétrique, donc $\vec{E} \parallel \vec{dS}$ sur la surface latérale, $\vec{E} \perp \vec{dS}$ sur les deux autres côtés.

$$\iint_{(S)} \vec{E}.dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$$

$$E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E.2\pi r h = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

~~2ème cas : M à l'inté~~ $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{rh}$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r h} \cdot \left[\rho_0 \frac{a^2}{2} + \rho_1 \frac{a^2}{3}\right] 2\pi h$$

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\left(\rho_0 \frac{a^2}{2} + \rho_1 \frac{a^2}{3}\right)}$$

. 2ème cas : M à l'intérieur :

$$\Phi = \iint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} \quad \text{avec } \vec{E} \parallel dS$$

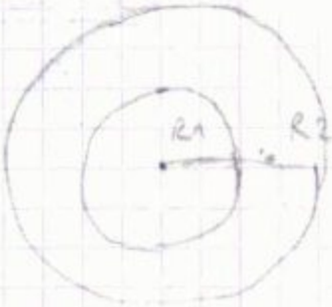
$$Q_1 = \iiint \rho\, d\tau = 2\pi h\left[\frac{\rho_0 r^2}{2} + \frac{\rho_1 r^3}{3a}\right)$$

$$\cancel{E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{rl} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r l}\left[\rho_0 \frac{a^2}{2} + \rho_1 \frac{a^2}{3}\right] 2\pi l}$$

$$E = \frac{1}{2\pi r h} \cdot \frac{2\pi h}{\varepsilon_0}\left[\frac{\rho_0 r^2}{2} + \frac{\rho_1 r^3}{3a}\right] = \boxed{\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{\rho_0 . r}{2} + \frac{\rho_1 r^2}{3a}\right]}$$

ETUSUP .com

10/3/08 **EXERCICE 4**



① Calcul du champ $\vec{E}$:

. A l'extérieur :

théorème de Guass : $\Phi = \iint_{(S_1)} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$

$$\iint_{(S_1)} \vec{E_3}.\vec{dS_3} = E_3 . dS_3 = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$Q_1 = \iiint \rho \, d\tau$$

avec $d\tau = r^2 dr . \sin\theta \, d\theta . d\varphi$ et $\rho = \frac{a}{r^2}$

Donc : $Q_1 = \iiint \left(\frac{a}{r^2}\right) r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$= \int_{R_1}^{R_2} a \, dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= a(R_2 - R_1) . [-\cos\theta]_0^{\pi} . \cancel{[2\pi - 0]} . [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$= a(R_2 - R_1) . (-\cos\pi - \cancel{(}\cos 0\cancel{)}) . (2\pi - 0)$$

$$= 2\pi a (R_2 - R_1)(1 - (-1))$$

$$= 2\pi a (R_2 - R_1) . 2 = 4\pi a (R_2 - R_1)$$

$$\Leftrightarrow E_3 . S_3 = 4\pi a \frac{(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0}$$

$$E_3 . 4\pi r^2 = \frac{4\pi a}{\varepsilon_0} . (R_2 - R_1)$$

$$\boxed{E_3 = \frac{a}{\varepsilon_0 r^2}(R_2 - R_1)}$$

. 2ème cas : (M_2 se situe entre S_1 et S_2)

On a : $\Phi = \iint_{(S_2)} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$

$$\iint \vec{E_2}.\vec{dS_2} = E_2 . S_2 = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

$Q_2 = \iiint_v \rho \, d\tau$ avec $d\tau = r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$Q_2 = \int_{R_1}^{r} a \, dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= a(r - R_1)(-\cos\pi + \cos 0) . (2\pi)$$

$$= 2\pi a (r - R_1)(1 + 1)$$

$$= 4\pi a (r - R_1)$$

$\Leftrightarrow E_2 . S_2 = 4\pi a \frac{(r - R_1)}{\varepsilon_0}$ avec $S_2 = 4\pi r^2$

$$E_2 = \frac{a}{r^2}\left(\frac{r - R_1}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\boxed{E_2 = \frac{a}{\varepsilon_0} . \left(\frac{r - R_1}{r^2}\right)}$$

ETUSUP .com

3ème cas : M_1 se trouve dans la sphère 1 tq $r < R_1$

On a : $\Phi = \iint_{(S_1)} \vec{E_1} \cdot \vec{dS_1} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} = 0$

$$E_1 \cdot dS_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = 0}, \quad S_1 \neq 0 \qquad \text{(absence des charges dans } (S_1))$$

(2) ⊛ $\vec{E_3} = -\vec{grad}\, V_3$

$$dV_3 = -E_3\, dr$$

$$V_3 = -\iint E_3\, dr$$

$$V_3 = -\int \frac{a}{\varepsilon_0 r^2}(R_2 - R_1)\, dr + \cancel{C}$$

$$= \frac{a}{\varepsilon_0} \int \frac{-1}{r^2}(R_2 - R_1)\, dr + \cancel{C}$$

$$= \frac{(R_2 - R_1)a}{\varepsilon_0} \int \underbrace{\frac{-1}{r^2}}_{\to \frac{1}{r}} dr + \cancel{C}$$

$$V_3 = \frac{a}{\varepsilon_0 r}(R_2 - R_1) + C$$

$$\lim_{r \to +\infty} V_3 = 0 \iff C = 0$$

$$\iff \boxed{V_3 = \frac{a}{\varepsilon_0 r}(R_2 - R_1)}$$

⊛ M entre (S_1) et (S_2)

On sait que $\vec{E_2} = -\vec{grad}\, V_2$ d'où : $V_2 = -\int E_2\, dr$

$$V_2 = -\int \frac{a}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{r^2}\right) dr = \frac{-a}{\varepsilon_0}\left(\int \left(\frac{1}{r} - \frac{R_1}{r^2}\right) dr\right)$$

$\to \operatorname{Log} r$ $\qquad + R\left(\frac{-1}{r^2}\right) \to \frac{R}{r}$

$$V_2 = \frac{-a}{\varepsilon_0} \ln r - \frac{aR_1}{\varepsilon_0 r} + C_2$$

Si $r \to R_2$.

$V_2(R_2) = V_3(R_3)$ $\qquad$ A cause de la continuité du potentiel $R_2 = R_3$

$$C_2 = +\frac{a}{\varepsilon_0}(1 + \ln R_2) \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{-a}{\varepsilon_0}\ln R_2 - \frac{aR_1}{\varepsilon_0 R_2} + \frac{a}{\varepsilon_0}(1 + \ln R_2)}$$

⊛ On a $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

$$dV_1 = E_1\, dr$$

$$V_1 = -\int E_1\, dr \qquad \text{avec} \quad E_1 = 0$$

$$V_1 = cte$$

$$V_1(R_1) = V_2(R_2)$$

ETUSUP .com

$$cte = \frac{-a}{\varepsilon_0} \ln R_1 - \frac{a}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{R_1} + \frac{a}{\varepsilon_0}(1 + \ln R_2)$$

$$= \frac{a}{\varepsilon_0}(\ln R_2 - \ln R_1)$$

$$= \frac{a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

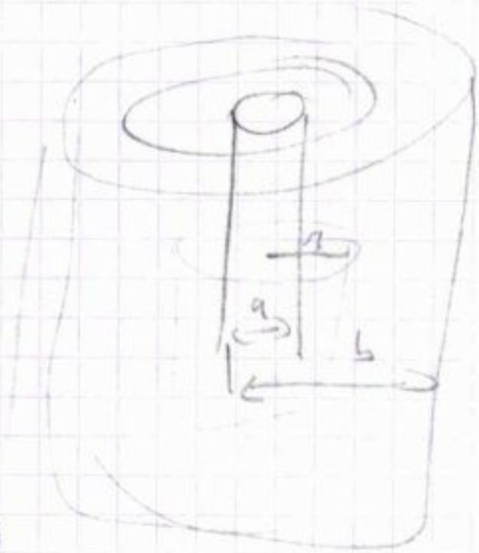
$$\boxed{V_1 = \frac{a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = cte$$

EXERCICE 5

1) Calcul du champ E entre a et b => th. de Gauss.

$$\Phi = E.S = E.2\pi r.h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r h}$$



$$V = -\int E\,dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$V_b - V_a = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\frac{b}{a} \Rightarrow (\ln a - \ln b)$$

$$\frac{(V_b - V_a)}{-Q} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0 h} \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_a - V_b} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{b}{a}}}$$

2)

$$\ln\frac{b}{a} = \cancel{\frac{\ln 7{,}27}{\ln 2}} \quad \ln\left(\frac{7{,}27}{2{,}58}\right) = 1{,}03$$

$$2\pi\varepsilon_0 = \frac{1}{9.9{,}10^9} = 0{,}055 \cdot 10^{-9}$$

$$\Rightarrow C = 0{,}055 \cdot 10^{-9}\,F = 55\,\mu F$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..

ETUSUP.com